1.16 Remarque
Il résulte de cette proposition que $\mathcal{E}([a,\ b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ de $\mathcal{E}([a,\ b])$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire, compatible avec la structure d'ordre partiel $\leq$ sur $\mathcal{E}([a,\ b])$.

2 Fonction intégrable au sens de Riemann

On va étendre la notion d'intégrale à des fonctions $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ plus générales que les fonctions en escaliers.

2.1 Définition (Fonction intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable))
Une fonction $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) sur $[a, b]$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions en escaliers u_ϵ et $v_\epsilon \in \mathcal{E}([a,\ b])$ telles que :

(i) $u_\epsilon \leq f \leq v_\epsilon$.

(ii) $\int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \leq \epsilon$.

On notera $\mathcal{R}([a,\ b])$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,\ b]$.

2.2 Remarque
Il résulte de cette définition que :

1) Toute fonction en escalier sur $[a,\ b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$, i.e. :

$$\mathcal{E}([a,\ b]) \subset \mathcal{R}([a,\ b]).$$

En effet, si $f \in \mathcal{E}([a,\ b])$, il suffit pour tout $\epsilon > 0$ de prendre $f = u_\epsilon = v_\epsilon$

2) Si $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors f est **bornée** sur $[a,\ b]$, puisque f est majorée et minorée sur $[a,\ b]$ par une fonction en escalier sur $[a,\ b]$, et que toute fonction en escalier sur $[a,\ b]$ est évidemment bornée sur $[a,\ b]$.

2.0.1 Exemple et contre-exemple

2.3 Exemple. Soit $\alpha > 0$ et soit la fonction $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \alpha x$.

Soit $\epsilon > 0$, on prend $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{\alpha}{n} < \epsilon$ et la subdivision régulière d'ordre n de $[0,\ 1]$, $\sigma_n = \{0 < \frac{1}{n} < \ldots < \frac{i}{n} < \ldots < 1\}$.

On considère les fonctions en escalier u_ϵ et v_ϵ sur $[0,\ 1]$ définies par :
pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$u_\epsilon|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[} = \frac{\alpha i}{n}, \quad v_\epsilon|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[} = \frac{\alpha(i+1)}{n}$$

$$\text{et } u_\epsilon(1) = v_\epsilon(1) = \alpha.$$

Par construction, on a $u_\epsilon \leq f \leq v_\epsilon$ et

$$\int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha(i+1)}{n} - \frac{\alpha(i)}{n} = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha(1)}{n} = \frac{\alpha}{n} < \epsilon.$$

Ainsi f est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

L'exemple suivant traite le cas d'une fonction bornée qui nest pas Riemann-intégrable.

2.4 EXEMPLE (FONCTION DE DIRICHLET). Soit la fonction $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ 0 \text{ si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

Si v est une fonction en escalier qui majore f, et si $\sigma = \{x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n\}$ est une subdivision adaptée à v, on a $v(x) = c_i$ sur l'intervalle $]x_i,\ x_{i+1}[$, et $f(x) \leq c_i$.
Par densité, il existe au moins un point x rationnel dans l'intervalle $]x_i,\ x_{i+1}[$ et donc $1 \leq c_i$.

Ainsi $v \geq 1$, sauf peut-être en un nombre fini de points. D'où $\int_0^1 v(x)dx \geq 1$.

D'autre part, si u est une fonction en escalier qui minore f, et si $\sigma' = \{x'_0,\ x'_1,\ \dots,\ x'_n\}$ est une subdivision adaptée à u, on a $u(x) = c'_i$ sur l'intervalle $]x'_i,\ x'_{i+1}[$, et $c'_i \leq f(x)$.
Par densité, il existe au moins un point x irrationnel dans l'intervalle $]x'_i,\ x'_{i+1}[$ et donc $c'_i \leq 0$.

Ainsi $u \leq 0$, sauf peut-être en un nombre fini de points. D'où $\int_0^1 u(x)dx \leq 0$.

Par suite $\int_0^1 v(x)dx - \int_0^1 u(x)dx \geq 1$.

On en déduit que pour $0 < \epsilon < 1$, il n'existe pas de fonctions en escalier u_ϵ et v_ϵ vérifiant le (i) et (ii) de la définition 2.1, puisqu'alors $\int_0^1 v_\epsilon(x)dx - \int_0^1 u_\epsilon(x)dx \geq 1 > \epsilon$.
La fonction f n'est donc pas Riemann-intégrable.

2.5 REMARQUE
La fonction de Dirichlet est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,\ 1]$, où la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A est la fonction $\mathbb{1}_A$ definie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

2.6 Exercice *Les fonctions f suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann?*

1) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \lfloor t \rfloor$ *où le symbole* $\lfloor t \rfloor$ *désigne la partie entière de* t.

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} \lfloor \frac{1}{t} \rfloor & si\ 0 < t \leq 1, \\ 1 & si\ t = 0. \end{cases}$

3) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\sin(\dfrac{1}{t}) & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

4) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} 1\ si\ t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 2\ si\ t \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$

2.0.2 L'intégrale d'une fonction intégrable au sens de Riemann

Soit maintenant f une fonction bornée sur $[a,\ b]$, considérons

$$\mathcal{E}_-(f) := \{u \in \mathcal{E}([a,\ b]) \text{ avec } u \leq f\} \text{ et } \mathcal{E}_+(f) := \{v \in \mathcal{E}([a,\ b]) \text{ avec } f \leq v\}.$$

$\mathcal{E}_-(f)$ et $\mathcal{E}_+(f)$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathcal{E}([a,b])$ puisque f est majorée et minorée sur $[a,\ b]$.
Par suite, on obtient deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ en posant

$$A(f) := \left\{\int_a^b u(t)dt; u \in \mathcal{E}_-(f)\right\} \text{ et } B(f) = \left\{\int_a^b v(t)dt; v \in \mathcal{E}_+(f)\right\}.$$

De plus, pour tout $\alpha \in A(f)$ et $\beta \in B(f)$, il existe des fonctions en escaliers sur $u \in \mathcal{E}_-(f)$ et $v \in \mathcal{E}_+(f)$ telles que : $\alpha = \int_a^b u(t)dt$ et $\beta = \int_a^b v(t)dt$.
Comme on a : $u \leq v$, on a donc $\alpha \leq \beta$.
Ainsi $A(f)$ est non vide, majoré, il admet donc une borne supérieure

$$I_+(f) = \sup A(f) = \sup_{\alpha \in A(f)} \alpha$$

De même, $B(f)$ est non vide minoré et admet une borne inférieure

$$I_+(f) = \inf B(f) = \inf_{\beta \in B(f)} \beta$$

et, de ce qui précède, on déduit que : $I_+(f) \leq I_-(f)$.
Maintenant, si $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, on va voir que $I_-(f) = I_+(f)$. En effet, soit $\epsilon > 0$, il existe u_ϵ et $v_\epsilon \in \mathcal{E}([a,\ b])$ vérifiant les (i) et (ii) de la définition 2.1. On a donc : $\alpha_\epsilon = \int_a^b u_\epsilon(x)dx \in A(f)$ et $\beta_\epsilon = \int_a^b v_\epsilon(x)dx \in B(f)$ et $\beta_\epsilon - \alpha_\epsilon \leq \epsilon$. Comme par ailleurs, on a : $\alpha_\epsilon \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \beta_\epsilon$, on en déduit que $0 \leq I_+(f) - I_-(f) \leq \epsilon$. Cet encadrement étant vrai pour tout nombre $\epsilon > 0$, il en résulte que $I_+(f) = I_-(f)$.

Ceci nous amène à la définition suivante :

2.7 Définition (Intégrale de f sur $[a,\ b]$)

Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Le nombre $I_+(f) = I_-(f)$ s'appelle intégrale de f sur le segment $[a,\ b]$ et se note $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

2.8 Remarque

1) Si f est en escalier sur $[a,\ b]$, on a immédiatement que $I_+(f) = I_-(f) = \int_a^b f(x)dx$ (prendre $u_\epsilon = v_\epsilon = f$). Ainsi, cette définition de l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ pour $f \in \mathcal{R}([a,\ b])$ est bien une généralisation de la notion d'intégrale des fonctions en escaliers sur $[a,\ b]$.
2) Si f est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$, il résulte de la définition que si $u,\ v \in \mathcal{E}([a,\ b])$ et vérifient $u \leq f \leq v$, alors : $\int_a^b u(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b v(x)dx$.

On va maintenant donner une version de la définition 2.1 en terme de suite, que allons utiliser essentiellement pour les démonstrations dans ce va suivre.

2.9 Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Les condition suivantes sont équivalentes

1) f est Riemann-intégrable
2) Il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier, telles que
   i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq f \leq v_n$
   ii) $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b v_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$

De plus $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b v_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.}$

Démonstration:

1) $\implies$ 2) Il suffit de prendre, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon = \frac{1}{n}$ dans la définition 2.1 et de poser $u_n = u_\epsilon$ et $v_n = v_\epsilon$.
On peut donc trouver deux suites de fonctions en escalier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq f \leq v_n$

ii) $0 \leq \int_a^b v_n(x)\,dx - \int_a^b u_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n}$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on aura $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b v_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$ et comme $u_n \leq f \leq v_n$, on aura $\int_a^b u_n(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b v_n(x)\,dx$ et le théorème des gendarmes (ou d'encadrement) permet de conclure que
$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b v_n(x)\,dx.$

2) $\implies$ 1) Réciproquement, pour $\epsilon > 0$ fixé et puisque $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b v_n(x)\,dx - \int_a^b u_n(x)\,dx = 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_1$ on a

$$\int_a^b v_n(x)\,dx - \int_a^b u_n(x)\,dx \leq \epsilon.$$

Alors les fonctions en escalier $u_\epsilon := u_{n_1}$ et $v_\epsilon := u_{n_1}$ vérifient les conditions (i) et (ii) de la définition 2.1, par suite f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. ∎

2.1 Familles de fonctions intégrables au sens de Riemann

2.1.1 Fonctions monotones

2.11 THÉORÈME
Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$.

De plus, si $\sigma_n = \{a < a + \frac{b-a}{n} < \ldots < a + i\frac{b-a}{n} < \ldots < b\}$ est la subdivision régulière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $[a,\ b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Démonstration: Il suffit de considérer le cas où f est croissante. Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et on se ramène au cas précédent.
On suppose donc que $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est croissante et on considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ la subdivision régulière $\sigma_n = (x_i = a + i\frac{b-a}{n})_{0\leq i\leq n-1}$ de $[a, b]$:

$$\sigma_n = \{a < a + \frac{b-a}{n} < \ldots < a + i\frac{b-a}{n} < \ldots < b\}.$$

On considère les fonctions en escalier u_n et v_n sur $[a,\ b]$ définies par :
pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$u_n|_{[x_i,x_{i+1}[} = f(x_i), \quad v_n|_{[x_i,x_{i+1}[} = f(x_{i+1})$$

$$\text{et } u_n(b) = v_n(b) = f(b).$$

Puisque f est croissante, pour $x \in [x_i, x_{i+1}[$ on a $f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$, d'où $u_n \leq f \leq v_n$.

De plus : $\displaystyle\int_a^b u_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}),$

$\displaystyle\int_a^b v_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)\frac{b-a}{n}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=11}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_a^b (v_n-u_n)(x)dx = \int_a^b v_n(x)dx - \int_a^b u_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(f(x_{i+1}-f(x_i)) =$ $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i)) = \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)).$

Par suite, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) = 0$, f est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$ et on a,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right).$$

. ■

2.13 Exercice *Montrer que les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ via $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = e^x$ sont intégrables sur tout intervalle $[a,\ b]$ avec $0 \le a < b$. En utilisant comme ci-dessus des subdivisions régulières, calculer les Intégrales $\int_0^1 f(t)dt$, $\int_1^2 g(t)dt$ et $\int_0^x h(t)dt$ (avec $x > 0$).*